Μάθημα 9ο

22/05/17

m σταθμοί παραγωγής $A_1, A_2, \ldots, A_m$

$a_1, a_2, \ldots, a_m$

n σταθμοί προορισμού $B_1, B_2, \ldots, B_n$

$b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

c_{ij} κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από το σταθμό i στο σταθμό j

x_{ij} η ποσότητα που μεταφέρεται από το σταθμό i στο σταθμό j.

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}		x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}		x_{2n} c_{2n}	a_2
$\vdots$					$\vdots$
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}		x_{mn} c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \quad + \lambda_n P_n \qquad \mu_1 \underset{\sim}{P_{2n}} + \quad \mu_2 P_{3n} \qquad p$

$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1$

$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2$

$x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m$

$+ x_{m1} = b_1$

$x_{11} \quad + x_{21}$

$x_{12} \ldots \quad + x_{22} \quad + x_{m2} = b_2$

$x_{1n} \quad + x_{2n} \quad + x_{mn} = b_n$

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1'} & \underline{0'} & \cdots & \underline{0'} \\ \underline{0'} & \underline{1'} & & \underline{0'} \\ \underline{0'} & \cdots & & \underline{1'} \\ I & I & & I \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

① $\sum a_i > \sum b_j$

Βάζουμε B_{n+1}

C_{n+i}

② $\sum a_i < \sum b_j$

Βάζουμε A_{m+1}

C_{m+j}

- Το πρόβλημα μεταφοράς έχει εφικτή λύση

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{S}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{S} = a_i \quad , i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{S} = b_j \quad , j = 1, \dots, n$$

- Το πρόβλημα μεταφοράς έχει άριστη λύση

$0 \le x_{ij} \le a_i \quad , \quad 0 \le x_{ij} \le b_j$

$0 \le x_{ij} \le \min\{a_i, b_j\} = M_{ij} \quad , M = \max\{M_{ij}\}$

$0 \le x_{ij} \le M$

Η άριστη λύση του προβλήματος μεταφοράς δεν αλλάζει αν από κάθε κόστος μεταφοράς C_{ij} που αναφέρεται σε ένα σταθμό παραγωγής A_k (ή σε ένα σταθμό προορισμού B_j) αφαιρεθεί η ίδια ποσότητα c.
Το νέο πρόβλημα μεταφοράς έχει ελάχιστο κόστος $R' = R - c a_k$ (ή $R' = R - c b_j$) όπου R είναι το ελάχιστο κόστος του αρχικού προβλήματος.

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & , i \neq k \\ c_{ij} - c & , i = k \end{cases}$$

$$R' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} (c_{kj} - c) x_{kj} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} - c \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} - c a_k$$

ΑΣΚΗΣΗ:

(ΒΔ γωνίας)

	B_1	B_2	B	B_4	
A_1	4 / 200	6 / 0	8 / 0	12 / 0	~~200~~ 0
A_2	2 / 100	5 / 160	7 / 0	4 / 0	~~260~~ ~~160~~ 0
A_3	6 / 0	9 / 80	13 / 100	8 / 100	340
	~~300~~ ~~100~~ 0	~~240~~ 80	160	100	800

$x_{11} = 200$
$x_{21} = 100$
$x_{22} = 160$
$x_{32} = 80$
$x_{33} = 160$
$x_{34} = 100$

x_{ij} η ποσότητα που μεταφέρεται από το σταθμό i στον σταθμό j, $i = 1,2,3$
$j = 1,2,3,4$

$$\min\ 4x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + \dots + 8x_{34}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 260$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 340$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 300$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 240$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 160$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100$$
$$x_{ij} \geq 0$$

μέθοδος Ελαχίστου στοιχείου

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 / 40	6 / 160	8 / 0	12 / 0	~~200~~ 160
A_2	2 / 260	5 / 0	7 / 0	4 / 0	~~260~~ 0
A_3	6 / 0	9 / 80	13 / 160	8 / 100	340
	~~300~~ ~~40~~ 0	~~240~~ 80	160	100	

Μέθοδος Vogel.

	2 2 2 2	3 3 1 1	5 1 1	4	
2 2 2 2 2	4 / 0	6 / 40	6 / 160	12 / 0	200
3 2	2 / 160	5 / 0	7 / 0	4 / 100	~~260~~ 160 0
3 3 3 2	6 / 140	200	0	8 / 0	340
	~~300~~ 140	~~240~~ 200	160 0	100 0	800

$\min \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{mn} \end{pmatrix}$

(Δ) $\max \underset{\sim}{b}'\underset{\sim}{w}$

$\underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{w} \leq \underset{\sim}{c}$ $\quad \underset{\sim}{w} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{u} \\ \underset{\sim}{v} \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$w_i \in \mathbb{R}$

$$\max \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$u_i + v_j \leq c_{ij}$

$u_i, v_j \in \mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Εστω $\underset{\sim}{u} = (u_1, \dots, u_m)'$, $\underset{\sim}{v} = (v_1, \dots, v_n)'$ μια εφικτή λύση του (Δ).
$\theta \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $u_i' = u_i - \theta$, $i = 1, \dots, m$ τότε $(u_1', u_2', \dots, u_m', v_1', \dots, v_n')'$
$v_j' = v_j + \theta$, $j = 1, \dots, n$
είναι επίσης εφικτή λύση που δίνει την ίδια τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση

$$u_i' + v_j' = u_i - \theta + v_j + \theta = u_i + v_j \leq c_{ij}$$

$$R' = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = \sum_{i=1}^{m} a_i (u_i - \theta) + \sum_{j=1}^{n} b_j (v_j + \theta) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j + \theta \cancel{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \right)} =$$

$R' = R$

Έστω $\{\hat{x}_{ij}\ ,\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\}$ μια εφικτή λύση του προβλήματος της μεταφοράς. Η $\{\hat{x}_{ij}\}$ είναι εφικτή <u>ανν</u> υπάρχουν $u_i\ ,\ i=1,\dots,m,\ V_j\ ,\ j=1,\dots,n$ τέτοια ώστε

$$u_i+V_j=c_{ij}\quad ,\ \text{αν } \hat{x}_{ij}\geq 0$$

$$u_i+v_j\leq c_{ij}\quad ,\ \text{αν } \hat{x}_{ij}=0$$

Αν $\{\hat{x}_{ij}\}$ η άριστη λύση τότε (Δ) έχει άριστη λύση.

Από θεώρημα συμπληρωματικής χαλάρωσης.

Αν ισχύουν οι σχέσεις, θα δείξουμε ότι $\{\hat{x}_{ij}\}$ άριστη

$$\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{ij}=a_i\ ,\ \sum_{i=1}^{m}\hat{x}_{ij}=b_j\ ,\ j=1,\dots,n\ ,\ i=1,\dots,m\ ,\ \hat{x}_{ij}\geq 0.$$

$$\hat{R}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\hat{x}_{ij}=\sum\sum(u_i+V_j)x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_i\hat{x}_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}V_j\hat{x}_{ij}=\sum_{i=1}^{m}u_ia_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j$$

x_{ij}' μια εφικτή λύση του (Π).

$$R'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}'\geq\sum\sum(u_i+v_j)\hat{x}_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m}u_i\sum_{j=1}^{n}x_{ij}'+\sum_{j=1}^{n}v_j\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}u_ia_i+\sum_{j=1}^{n}v_jb_j=\hat{R}$$

ΑΣΚΗΣΗ:

R_0

u \ v	9	-19	-20	0	
10	19 5	-32 30 0	-60 50 0	10 2	7
60	-1 70 0	18 + 30 0	40 7	60 − 2	9
20	-11 40 0	9 − 8	70 70 0	20 +10	18
	5	9	7	14	34

$u_i+v_j=c_{ij}$ βασική μεταβλητή

$u_1+v_1=19$	$v_1=9$
$u_1+v_4=10$	$u_1=10$
$u_2+v_3=40$	$v_3=-20$
$u_2+v_4=60$	$u_2=60$
$u_3+v_2=8$	$v_2=-12$
$u_3+v_4=20$	$v_4=0$
	$u_3=20$

$\delta_{ij}=u_i-v_j-c_{ij}$

$\theta_0 = \min\{x_{ij}$ για τετράγωνα με $-\} = \min\{2, 8\} = 2.$

$$x_{ij}' = \begin{cases} x_{ij} + \theta_0 & + \\ x_{ij} - \theta_0 & - \\ x_{ij} & \text{για τα υπόλοιπα.} \end{cases}$$

$R_1 = R_0 - \theta_0 \delta_{22}$

u \ v	24	8	18	20
-10	19 / 8	-32 / 30 / 0	-42 / 50 / 0	10 / 2
22	70 / 0	30 / 2	40 / 7	-12 / 60 / 0
0	-11 / 40 / 0	8 / 6	-51 / 70 / 0	20 / 12

$x_{11} = 5, \quad x_{14} = 2$

$x_{22} = 2 \quad x_{23} = 7$

$x_{32} = 6 \quad x_{34} = 12$

$\delta_{ij} < 0$

ΑΣΚΗΣΗ:

	B_1	B_2	B_3
A_1	30	52	76
A_2	42	36	80
A_3	55	48	60

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν το άτομο } A_i \text{ παρ στη θέση } B_j \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$\max 30x_{11} + 52x_{12} + \dots + 60x_{33}$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$

1) α) Αφαιρούμε το μεγαλύτερο c_{ij} κάθε γραμμής από κάθε c_{ij} της αντίστοιχης γραμμής

β) στο νέο tableu αφαιρούμε το μεγαλύτερο c_{ij} κάθε στήλης από κάθε c_{ij} της στήλης

2) Αν $r=n$ τότε το tableu δίνει την άριστη λύση
Αν $r<m$ πάμε στο επόμενο βήμα
3) Αφαιρούμε το μεγαλύτερο μη διαγεγραμμένο a_{ij} από κάθε μη διαγεγραμμένο a_{ij} και το προσθέτουμε στην διασταύρωση 2 ευθειών
4) Επιστρέφουμε στο 2).

-46	-24	0
-38	-44	0
-5	-12	0

-41	-12	0
-33	-32	0
0	0	0

-29	0 *	0
-21	-20	0 *
0	0	-12

$X_{12}=1$

$X_{23}=1$

$X_{31}=1$